# Урок №6 (31.01.2007)
# Основы Общей Теории Относительности.

*Здесь приводится только крошечный кусочек большой теории, необходимый для иллюстрации возникновения магнитных явлений… Материал взят из книг: Дж.Б.Мэрион «Физика и физический мир»; Е.И.Бутиков, А.С.Кондратьев, В.М.Уздин «Физика», т.3; Дж.Орир «Физика», т.1 и других.*

## 0. Проблемы и предпосылки

### Теория Максвелла и мировой эфир

XIX век – развитие электромагнетизма. Максвелл придумывает теорию: свет представляет собой электромагнитные волны, распространяющиеся в специальной среде – *эфире*.

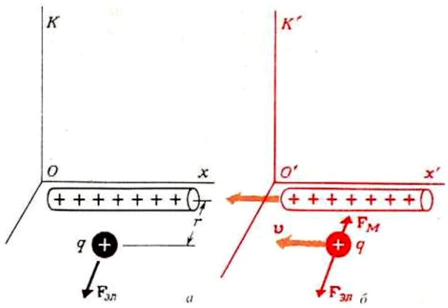
В 90-х годах Майкельсон и Морли проводят эксперимент по нахождению эфира и доказывают, что либо эфир увлекается Землёй так, что все экспериментальные установки на Земле покоятся относительно него, либо эфира нет.

Дальнейшие исследования распространения света и электромагнитных волн в движущихся прозрачных средах точно доказывают, что эфира не существует: электромагнитные волны распространяются в вакууме.

### Принцип относительности Галилея и магнетизм

Принцип относительности Галилея постулирует, что во всех инерциальных системах отсчета законы механики остаются неизменными. Иными словами невозможно построить механический эксперимент определяющий абсолютную скорость инерциальной системы отсчёта.

Теперь рассмотрим длинный заряженный проводник. Выберем систему отсчёта, в которой проводник покоится и расположим рядом с ним неподвижный заряд $q$.




Очевидно, на заряд будет действовать кулоновская сила со стороны проводника (отталкивания, как показано на рис.) Переместимся теперь в СО, движущуюся с постоянной скоростью вдоль проводника. В этой системе в проводнике течёт ток. При этом заряд $q$ в этой системе тоже движется вдоль проводника. Следовательно на заряд со стороны проводника кроме кулоновской действует магнитная сила! Значит мы можем найти «истинно неподвижную» систему отсчёта.

### Преобразования Галилея и скорость света

Преобразования Галилея приводят к закону сложения скоростей: при переходе от одной СО (лабораторной) в другую, движущуюся со скоростью $\vec{u}$, скорости преобразуются по закону $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$. Из этого утверждения следует, что скорость света также должна быть различна в разных СО. Однако уравнения Максвелла (описывающие непротиворечиво все полученные к концу XIX в. экспериментальные результаты по электричеству, магнетизму и распространению электромагнитных волн) утверждают, что скорость света постоянна во всех системах отсчёта и равна $c = 3 \cdot 10^8\ м/с$.

А.Пуанкаре и А.Эйнштейн независимо, опираясь на работы Х.А.Лоренца, теоретически вывели некий аналог преобразований Галилея, позволяющий устранить противоречия, возникающие при переходе от одной СО к другой:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Преобразования получили название *преобразований Лоренца*.

Эйнштейн, анализируя эти преобразования, сумел понять их философию и переосмыслить основные постулаты теории относительного движения, откуда и возникла в итоге *теория относительности*. Основана она была на двух постулатах:

- принцип относительности, утверждающий что все инерциальные СО эквивалентны;
- принцип предельности скорости взаимодействий, утверждающий что никакое взаимодействие не может передаваться со скоростью, превышающей скорость света в вакууме.

## 1. Релятивистская кинематика

### *Одновременность*

Все кинематические законы основываются на предположении, что мы можем определить положение тела в данный момент времени. Проблема в том, что как следует из преобразований Лоренца, время в разных СО не является инвариантом, т.е. изменяется при переходе от одной системы к другой.

Для того, чтобы понять, что мы имеем в виду под словосочетанием «данный момент времени», мы должны определить понятие *одновременности*, т.е. научиться синхронизировать разные часы. Если часы находятся в одной точке пространства, то это очевидно.

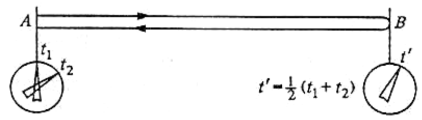


Рис. 2. К определению понятия одновременности событий

Пусть теперь у нас часы расположены на некотором расстоянии в точках $A$ и $B$ (в одной и той же СО). Пусть в момент времени $t_1$ по часам $A$ свет начинает распространяться от $A$ к $B$, отражается от $B$ и приходит назад в $A$ в момент $t_2$. Пусть, с другой стороны, часы $B$ в момент прихода света от $A$ показывают время $t'$. Эйнштейн определяет, что часы $A$ и $B$ *синхронизированы*, если $t' = (t_2 - t_1)/2$.

### *Определение расстояний*

Для определения расстояния между точками будем использовать «радиолокационный» метод: для измерения расстояния между точками $A$ и $B$ из точки $A$ посылаются световые сигналы, отражаются от точки $B$ и регистрируются в точке $A$. Расстояние определяется по времени прохождения луча: $l = c\left(t_2 - t_1\right)/2$.

### *Относительность понятия одновременности*

Рассмотрим теперь две инерциальные системы отсчёта. Обозначим их $K$ и $K'$ и предположим, что $K'$ движется со скоростью $v$ относительно $K$ в положительном направлении оси $x$.

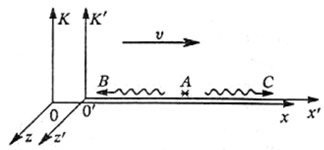
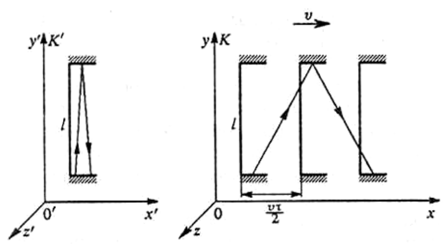


Рис. 3. Относительный характер одновременности событий

Рассмотрим теперь следующий эксперимент в $K'$: из точки $A$ в противоположных направлениях испускается световые импульсы, отражаются в точках $B$ и $C$ и возвращаются в точку $A$. Пусть импульсы возвращаются одновременно. В этом случае мы, находясь в системе $K'$ делаем вывод, что точки $B$ и $C$ расположены на равных расстояниях от точки $A$. Также мы можем сказать, что световые импульсы <u>одновременно</u> достигли точек $B$ и $C$.

Посмотрим теперь на распространение импульсов с точки зрения наблюдателя, находящегося в системе $K$. С его точки зрения свет продолжает распространяться с той же абсолютной скоростью света, но точки $B$ и $C$ не неподвижны: точка $B$ «набегает» на импульс, а точка $C$ наоборот, «убегает» он него. Поэтому импульсы придут в эти точки <u>не одновременно</u>…

### *Преобразование промежутков времени при переходе из одной СО в другую*




Поставим в системе $K'$ следующий эксперимент: измерим время $\tau_0$, необходимое импульсу света между зеркалами, расположенными вертикально (вдоль оси $y'$), на расстоянии $l$ друг от друга. Очевидно $\tau_0 = 2l/c$. Назовём $\tau_0$ *собственным* временным промежутком для системы $K'$.

Для наблюдателя из системы $K$ тот же эксперимент будет выглядеть иначе: свет, с его точки зрения, будет двигаться зигзагообразно. При этом он пройдет путь $2\sqrt{l^2 + \left(v\tau/2\right)^2}$, т.к. за время эксперимента система сдвинется на расстояние $v\tau$. Для определения $\tau$ можно записать уравнение:

$$c\tau = 2\sqrt{l^2 + \left(v\tau/2\right)^2},$$

откуда

$$\tau = \frac{2l}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

или

$$\boxed{\tau = \tau_0 \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}.$$

*Заметим, что длина $l$ в разных системах отсчёта не меняется – это можно более-менее легко доказать.*

Таким образом промежуток времени, измеренный «извне» всегда больше собственного промежутка времени системы. Этот факт не зависит от способа измерения промежутков времени; его легко проверить экспериментально: можно измерить время жизни быстрых мюонов в космических лучах – оно получается больше собственного времени жизни мюона ($2.2 \cdot 10^{-6}\ c$).

Часто вводят два обозначения: $\beta \equiv v/c$; $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \geq 1$. В этих обозначениях

$$\boxed{\tau = \gamma \cdot \tau_0}$$

***Относительность длины.***

Пусть у нас в системе $K'$ вдоль оси $x'$ лежит стержень длины $l_0$ (измеренной наблюдателем из $K'$ методом, описанным выше).

И пусть, также, в системе $K$ наблюдатель находится в некоторой точке $A$, расположенной на оси $x$. С точки зрения наблюдателя стержень «проедет» мимо него со скоростью $v$. Поэтому для определения его длины наблюдатель умножит скорость системы $K'$ (которую он знает – $v$) на время, за которое «проехал» стержень, измеренное по своим часам – $\tau_0$ (собственное время в системе $K$!): $l = v \cdot \tau_0$. По-другому, это промежуток времени между двумя событиями:

a) начало стержня совместилось с точкой $A$;

b) конец стержня совместился с точкой $A$.

Но с точки зрения наблюдателя из системы $K'$ точка $A$ движется вдоль неподвижного стержня с той же скоростью $v$, поэтому $l_0 = v \cdot \tau$, где $\tau$ – промежуток времени между событиями a) и b) в системе $K'$. В итоге получаем:

$$\boxed{l = l_0 \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

или

$$\boxed{l = l_0/\gamma}.$$

Итак мы видим, что длина стержня *сокращается* с точки зрения наблюдателя, находящегося в движущейся системе отсчёта.

***Преобразования Лоренца и релятивистское сложение скоростей***

Мы не будем здесь выводить преобразования Лоренца, уже написанные выше. Скажем лишь, что вывод основан на представлении координаты длиной до начала координат и, соответственно, сам переход между системами есть проведение эксперимента по измерению этой длины наблюдателями в разных системах. Так как такое преобразование координат должно выглядеть одинаково как для перехода из $K$ в $K'$, так и для перехода из $K'$ в $K$ (с учётом замены $v$ на $-v$, естественно), то из полученной системы уравнений можно вывести и закон преобразования времени.

Из преобразований Лоренца можно вывести и закон преобразования скоростей. Опять же, мы не будем его выводить и запишем лишь в частном виде, когда тело движется вдоль оси $x$:

$$\boxed{u = \frac{u' + v}{1 + \dfrac{v \cdot u'}{c^2}}}.$$

Заметим, что скорость света «преобразуется» в скорость света по этому закону.

### *Чуть-чуть релятивистской динамики*

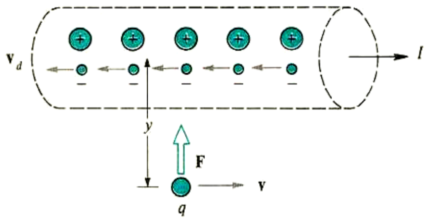
Уравнения классической динамики удовлетворяют принципу относительности в смысле преобразований Галилея. Но сами преобразования Галилея переходят в преобразования Лоренца. Поэтому и выражения для импульса и энергии в релятивистском случае меняют свой вид.

Опять же без вывода приведём выражения для импульса и энергии:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m\vec{v} \cdot \gamma, \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0 c^2 \cdot \gamma$$

## 2. Релятивистское взаимодействие тока и заряда

Рассмотрим неподвижный проводник, по которому течёт ток $I$. Т.к. проводник электрически нейтрален, линейная плотность электронов в нём $\lambda_-$ должна быть равна линейной плотности положительно заряженных ионов $\lambda_+ = -\lambda_-$. При этом ионы покоятся, относительно проводника, а электроны движутся со скоростью дрейфа $v_d$.




Предположим теперь, что на расстоянии $y$ от проводника вдоль него со скоростью $v$ движется заряд $q$, как показано на рисунке. Мы не умеем считать силу взаимодействия движущегося заряда, но мы можем перейти в систему отсчета, связанную с этим зарядом $K'$. С точки зрения наблюдателя, находящегося в $K'$, проводник движется мимо него со скоростью $v$, а электроны проводимости с несколько большей скоростью $v'_-$. Попробуем посчитать, чему равна результирующая плотность заряда $\lambda'$ с точки зрения этого наблюдателя.

Итак, в системе $K'$ плотность заряда в проводнике равна

$$\lambda' = \lambda'_+ + \lambda'_-.$$

В следствие лоренцова сокращения

$$\lambda'_+ = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \lambda_+$$

С электронами сложнее. Для нахождения их плотности в системе $K'$ заметим сначала, что их «собственная» плотность не равна $\lambda_-$, т.к. электроны движутся со скоростью $v_d$. Итак, в «электронной» системе отсчёта плотность электронов будет

$$(\lambda_-)_0 = \lambda_- \cdot \sqrt{1 - v_d^2/c^2} \,.$$

С нашей, лабораторной точки зрения электроны имеют б**о**льшую плотность $\lambda_-$, опять же в силу лоренцова сокращения расстояний между ними.

В системе $K'$ электроны движутся со скоростью

$$v'_- = \frac{v + v_d}{1 + \frac{v \cdot v_d}{c^2}} \,,$$

при этом их плотность равна

$$\lambda'_- = \frac{1}{\sqrt{1 - v_-'^2/c^2}} \cdot (\lambda_-)_0 \,.$$

Обозначим $\beta \equiv v/c$; $\beta_d \equiv v_d/c$; $\beta' \equiv v'_-/c$.

В этих обозначениях

$$\lambda'_- = \frac{\sqrt{1 - \beta_d^2}}{\sqrt{1 - \beta'^2}} \cdot \lambda_-$$

и

$$\beta' = \frac{\beta + \beta_d}{1 + \beta \cdot \beta_d} \,.$$

Избавляясь от $\beta'$, получаем:

$$\lambda'_- = \frac{\sqrt{1 - \beta_d^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta + \beta_d}{1 + \beta \cdot \beta_d}\right)^2}} \cdot \lambda_- =$$

$$= \frac{(1 + \beta \cdot \beta_d)\sqrt{1 - \beta_d^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \beta_d^2)}} \cdot \lambda_-$$

$$\lambda'_- = \frac{1 + \beta \cdot \beta_d}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \lambda_-$$

Складывая плотности положительных ионов и электронов, получим:

$$\lambda' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \lambda_+ + \frac{1 + \beta \cdot \beta_d}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \lambda_- \,.$$

Заменив $\lambda_+$ на $-\lambda_-$ окончательно получим:

$$\lambda' = \frac{\beta \cdot \beta_d}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \lambda_- .$$

С другой стороны $I = -\lambda_- \cdot v_d$, поэтому подставляя скорости запишем последнюю формулу так:

$$\lambda' = -\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\frac{v}{c^2}\right) I .$$

Итак, попытаемся теперь посчитать силу, с которой заряд $q$ взаимодействует с проводником. В системе отсчёта, связанной с зарядом, по определению $F' = qE' = q \cdot \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda'}{y}$, где $y$ – расстояние от заряда до центра проводника. Подставляя полученное выражение для $\lambda'$, получим:

$$F' = \frac{qv}{c^2 \cdot \sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{I}{y}\right).$$

Мы получили, что в системе $K'$, связанной с зарядом, на него действует сила. Но это означает, что и в лабораторной системе на него должна действовать сила! Учитывая, что $F = \gamma \cdot F'$ (примем эту формулу без вывода, – она выводится из релятивистского определения импульса и определения силы $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$), окончательно получим:

$$F = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{I}{y} qv$$

Если рассмотреть задачу взаимодействия движущегося заряда с магнитным полем проводника, получим:

$$F = qv \cdot B ,$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{y} .$$

Откуда

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{y} qv ,$$

и, следовательно

$$\frac{\mu_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{c^2} ,$$

или

$$\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$